ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TÔ THỊ THIẾM

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐIỀU KIỆN CỦA ĐA THỨC ĐẠO HÀM

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 8 46 01 02

Giáo viên hướng dẫn:
PGS. TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Tô Thị Thiếm

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **PGS. TS. Hà Trần Phương**, người thầy tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Tô Thị Thiếm

Mục lục

Lời nói đầu

Như một ứng dụng quan trọng của lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, các nghiên cứu về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình luôn thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Những công trình này được khởi nguồn từ định lý 5 điểm của Nevanlinna và càng có nhiều công trình được công bố dưới nhiều hình thức khác nhau.

Cho f là một hàm phân hình trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Kí hiệu

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty.$$

Hàm phân hình $a = a(z)$ là một hàm nhỏ của f nếu $T(r, a) = S(r, f)$. Kí hiệu $S(f)$ là tập hợp các hàm phân hình nhỏ của f.

Cho f và g là hai hàm phân hình trong $\mathbb{C}$ và $a \in S(f) \cap S(g)$. Ta nói rằng f và g chung nhau hàm nhỏ $a = a(z)$ kể cả bội (hoặc không kể bội) nếu $f - a$ và $g - a$ có cùng tập hợp các $0-$điểm kể cả bội (tương ứng không kể bội).

Cho h là hàm phân hình khác hằng, kí hiệu

$$P(h) = \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=0}^{p} (h^{(j)})^{l_{kj}},$$

trong đó $a_k \in S(h), k = 1, 2, ..., n$ và $l_{kj}, k = 1, 2, ..., n; j = 0, 1, ..., p$ là các số không âm. $P(h)$ được gọi là đa thức đạo hàm của h.

Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng. $P(f)$ và $P(g)$ là lần lượt là các đa thức đạo hàm của f và g, $a_k \in S(f) \cap S(g)$. Vấn đề đặt ra là nếu $P(f)$ và $P(g)$ chung nhau hàm nhỏ $a(z)$ thì vấn đề gì sẽ xảy ra đối với các hàm f và g hoặc $P(f)$ và $P(g)$? Những kết quả theo hướng nghiên cứu này liên quan đến các công trình của J. T. Li, P. Li, H. X. Yi, C. C. Yang và nhiều tác giả khác.

Với mong muốn tìm hiểu những kết quả nghiên cứu theo hướng này, chúng tôi lựa chọn đề tài *"Vấn đề duy nhất cho hàm phân hình với điều kiện của đa thức đạo hàm"*. Mục đích chính của đề tài là trình bày lại một số kết quả nghiên cứu gần đây của J. T. Li và P. Li trong [9] và I. Lahiri và B. Pal trong [8]. Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 của luận văn dành cho việc trình bày một số kiến thức về các hàm Nevanlinna, hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và một số tính chất về phân bố giá trị của hàm phân hình với điều kiện của đa thức đạo hàm.

Chương 2 trình bày về vấn đề duy nhất cho hàm nguyên và hàm phân hình với điều kiện của đa thức đạo hàm chung nhau một giá trị hay hàm nhỏ.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Kiến thức cơ bản về lý thuyết Nevanlinna

1.1.1 Các hàm Nevanlinna

Định nghĩa 1.1.1. Cho f xác định trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, lấy giá trị trên $\overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$ là một miền. Ta nói f chỉnh hình tại $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu tồn tại một lân cận U của z_0 sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Với mọi $z \in U$, trong đó $c_n \in \mathbb{C}$ là các hằng số. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình* trên D nếu nó chỉnh hình tại mọi $z \in D$.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.3. Điểm z_0 được gọi là $0-$điểm cấp $m \geq 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0, hàm $f(z)$ có biểu diễn $f(z) = (z - z_0)^m.h(z)$, trong đó $h(z)$ chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$. Điểm z_0 được gọi là cực điểm cấp $m \geq 0$ của hàm $f(z)$ nếu z_0 là $0-$điểm cấp m của hàm $\frac{1}{f(z)}$.

Với hàm phân hình f, ta kí hiệu :

$$ord_f(z_0) = \begin{cases} m \quad \text{nếu } z_0 \text{ là } 0-\text{điểm cấp } m \text{ của } f(z) \\ 0 \quad \text{nếu } f(z_0) \neq 0, \infty \\ -m \quad \text{nếu } z_0 \text{ là cực điểm cấp m của } f(z). \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.4. Hàm số $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu nó chỉnh hình trong miền D, trừ ra tại một số điểm bất thường là cực điểm. Khi đó $f(z)$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ ta gọi đơn giản là hàm phân hình.

Nhận xét: Nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì trong mỗi lân cận của $z \in D$ hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng Nevanlinna của một hàm phân hình.

Với mỗi số thực dương $x \in \mathbb{R}_+^*$, kí hiệu

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{nếu } x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Như vậy:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\},$$
$$\log x = \log^+ x = \log^+ \frac{1}{x}.$$

Cho $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ là một hàm phân hình, với mỗi số thực $R > 0$, ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|\frac{1}{f(Re^{i\varphi})}|d\varphi.$$

Định nghĩa 1.1.5. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm phân hình f.

Kí hiệu $n(r, f)$ là *số cực điểm* kể cả bội của hàm $f(z)$ trong đĩa $\{|z| < t\}$ và $n(0, f) = \lim\limits_{t \to 0} n(t, f)$. Khi đó, nếu $f(0) \neq \infty$ ta có

$$\int_0^R \log\frac{R}{t}dn(t, f) = \sum_{v=1}^{N} \log|\frac{R}{b_v}|,$$

trong đó $b_v, v = 1, 2, ..., N$ là các cực điểm của hàm f trong đĩa $\{|z| < R\}$.

Thật vậy, bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\int_0^R \log\frac{R}{t}dn(t,f) = log\frac{R}{t}n(t,f)\Big|_0^R - \int_0^R n(t,f)d\log\frac{R}{t} = \int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}.$$

Do hàm f chỉ có hữu hạn cực điểm trong $\{|z| \le R\}$ nên hàm $n(t,f)$ chỉ nhận một số hữu hạn giá trị nguyên không âm và tăng theo t. Gọi $r_1, r_2, ..., r_{n-1} \in \{|b_v|, v = 1, ..., N\}$ và r_0, r_n là các số thực không âm sao cho $0 = r_0 < r_1 < ... < r_{n-1} < r_n = R$ và trên mỗi hình vành khăn $\{r_j < |z| \le r_{j+1}\}$ hàm $n(t,f)$ không đổi. Khi đó:

$$\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} = \int_{r_0}^{r_1} n(t,f)\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} n(t,f)\frac{dt}{t} + ... + \int_{r_{n-1}}^{r_n} n(t,f)\frac{dt}{t}.$$

Giả sử

$$n(t,f) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } t \le r_1 \\ \alpha_1 \quad \text{nếu } r_1 < t \le r_2 \\ ... \\ \alpha_{n-1} = N \quad \text{nếu } r_{n-1} < t \le r_n = R. \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} &= \int_{r_0}^{r_1} 0.\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} \alpha_1\frac{dt}{t} + ... + \int_{r_{n-1}}^{r_n} \alpha_{n-1}\frac{dt}{t} \\ &= \alpha_1 \log t\Big|_{r_1}^{r_2} + \alpha_2 \log t\Big|_{r_2}^{r_3} + ... + \alpha_{n-1}\log t\Big|_{r_{n-1}}^{R} \\ &= \sum_{v=1}^{N} \log\frac{R}{r_v} = \sum_{v=1}^{N}\log\frac{R}{|b_v|}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.6. Hàm $N(R,f) = \sum_{v=1}^{N}\log\frac{R}{|b_v|}$ được gọi là *hàm đếm* (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm) của hàm f.

Định nghĩa 1.1.7. Hàm

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f)$$

gọi là *hàm đặc trưng* của f.

Các hàm đặc trưng $T(R,f)$, hàm xấp xỉ $m(R,f)$ và hàm đếm $N(R,f)$ là các hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, còn gọi là các hàm Nevanlinna.

Định lý 1.1.8. *Cho các hàm phân hình $f_1, f_2, ..., f_p$, khi đó:*

$$(1).\quad m(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu) + \log p.$$

$$(2).\quad m(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu).$$

$$(3).\quad N(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu).$$

$$(4).\quad N(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu).$$

$$(5).\quad T(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p.$$

$$(6).\quad T(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu).$$

Tiếp theo ta đề cập đến một số hàm đếm mở rộng thường dùng trong chứng minh các định lý về xác định duy nhất hàm phân hình.

Cho f là hàm phân hình và $r > 0$, kí hiệu $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội cắt cụt bởi k trong $\overline{D}_r$ của f (tức là các cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$). Hàm

$$N_k(r, f) = \int_0^r \frac{n_k(r, f) - n_k(0, f)}{t} dt + n_k(0, f) \log r$$

được họi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi k, trong đó

$$n_k(0, f) = \lim_{r \to 0} n_k(r, f),$$

số k trong $n_k(r, f)$ được gọi là *chỉ số bội cắt cụt.*

Cho $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kí hiệu $n(r, \frac{1}{f-a})$ là các số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, \frac{1}{f-a})$ là số các không điểm phân biệt của $f - a$ trong $\overline{D}_r$.

$$N(r, 0; f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f-a}) - n(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f-a}) \log r,$$

$$\overline{N}(r, 0; f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f-a}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f-a})}{t} dt + \overline{n}(0, \frac{1}{f-a}) \log r.$$